Zur Wärmespeicherung in Baukonstruktionen

Klaus Kreč

Die Untersuchung der Wärmespeicherung in Baukonstruktionen führt über ein periodisch eingeschwungenes Wärmeleitungsmodell zu einem verallgemeinerten Leitwertkonzept (komplexe Leitwert-Matrizen), das als Grundlage für dreidimensionale instationäre Berechnungen des wärmetechnischen Verhaltens von Gebäuden dienen kann. Am Rande werden auch Beziehungen zu dem aus der Literatur bekannten Begriff des wirksamen Wärmespeichervermögens hergestellt.

1. Einleitung

Die Wärmespeicherfähigkeit von Bauteilen hat für das thermische Verhalten von Räumen insbesondere unter sommerlichen Bedingungen eine Bedeutung, die zwar schon seit langem bekannt ist, jedoch bis heute noch immer nicht in ihrem vollen Umfang quantitativ richtig erfaßt wird.

Erste Versuche einer Quantifizierung der Wärmespeicherfähigkeit findet man bei *Bruckmayer* [1], der Begriffe wie die „gleichspeichernde Ziegeldicke" und die „Auskühlkennzeit" einführt. Später (1952) führt *Sklover* [2] den Begriff der „Dämpfung" und daneben den der „Phasenverschiebung" eines Bauteiles ein – Begriffe, die auch in die bauphysikalischen Normen der damaligen DDR Eingang finden. Hier handelt es sich im Unterschied zu den *Bruckmayer*schen Kennwerten erstmals um Größen, die sich auf periodische Vorgänge mit einer Periode von 24 Stunden beziehen. Die Ende der sechziger Jahre von *Heindl* [3] publizierten Kenngrößen „Temperaturamplitudendämpfung", „thermischer Wechselstromwiderstand" etc. stützen sich ebenfalls auf die Annahme einer eintägigen Periode, können sich aber der wenig glücklich gewählten Randbedingungen wegen in der Praxis auch nicht durchsetzen.

Um 1970 entwickelten *Haferland*, *Heindl* und *Fuchs* [4] auf der Basis der schon bei *Carslaw-Jaeger* [5] zu findenden und von *Heindl* [3] in die Bauphysik eingeführten Bauteilmatrizen ein EDV-Programm, das die Berechnung der Tagesverläufe von Raumlufttemperaturen unter Berücksichtigung der Wärmespeicherfähigkeit der Baukonstruktion gestattet; erfaßt werden nur eindimensionale Wärmeleitungsvorgänge.

Der später von *Heindl* [6] eingeführte Begriff eines wirksamen Speichervermögens für einen aus mehreren homogenen Schichten zusammengesetzten plattenförmigen Bauteil stellt gegenüber dem erwähnten EDV-Programm eigentlich einen Rückschritt dar, kommt aber offenbar dem Wunsch vieler Praktiker nach einer einfach faßbaren Kenngröße so sehr entgegen, daß er sogar in eine österreichische Norm – die B 8110 – Eingang findet. Er ist übrigens mit dem hier eingeführten Begriff des „wirksamen Speichervermögens" nicht identisch. Die Beschränkung auf plattenförmige Bauteile ist, wie im folgenden erläutert werden soll, unnötig.

Die Wärmespeicherung für sich alleine und unabhängig von anderen wärmetechnischen Problemen zu betrachten ist sicher nicht sinnvoll. Um sie im Rahmen einer umfassenderen Systematik vernünftig abhandeln zu können, muß etwas weiter ausgeholt werden.

2. Das Wärmeleitungsmodell

Wärmetransportvorgänge in einem Gebäude erfolgen durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung. Im Inneren der Bauteile hat man es vorzugsweise mit Wärmeleitung zu tun – Konvektion und Strahlung spielen meist nur eine untergeordnete Rolle.

Für unsere Zwecke kann man ein Gebäude als einen Festkörper auffassen, der mit seiner äußeren Oberfläche an die Außenluft grenzt, mit seinen inneren Oberflächen an die Luft der verschiedenen Innenräume. Die in *Bild 1* gegebene Prinzipskizze soll dies – der Einfachheit halber nur zweidimensional – veranschaulichen.

Die für den Baufachmann vermutlich befremdende Darstellung wurde gewählt, um die in der Praxis zwar übliche, für unsere Zwecke aber unnötige Unterscheidung zwischen Innen- und Außenwänden in den Hintergrund treten zu lassen.

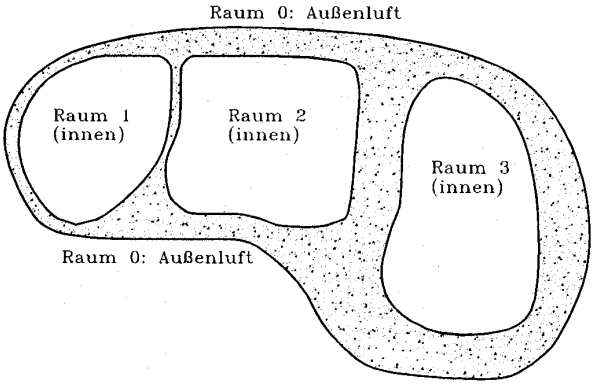

Bild 1. Prinzipskizze eines Gebäudes mit drei Innenräumen.

Dr. Klaus Kreč, c/o. Dr. Walter Heindl, Büro für angewandte Mathematik.

Die Wärmeleitung in einem Festkörper wird bekanntlich durch den *Fourier*schen Wärmestromansatz beschrieben, der die Wärmestromdichte $\vec{q}$ mit dem Gefälle der Temperatur U durch

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \operatorname{grad} U \tag{1}$$

verknüpft. Die Wärmeleitfähigkeit λ ist im isotropen Fall ein Skalar, bei Vorliegen von Anisotropie, wie sie beispielsweise beim Baustoff Holz auftritt, ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe.

Der Wärmestromansatz (1) ist noch zu ergänzen durch eine Bilanzgleichung, die die Quellen des Feldes der Wärmestromdichte $\vec{q}$ mit der zeitlichen Änderung der Temperatur U verknüpft:

$$c \cdot \varrho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{q}) . \tag{2}$$

In dieser Form gilt die Bilanzgleichung, in der c die spezifische Wärmekapazität und ϱ die Massendichte des Baustoffes bedeutet, natürlich nur, wenn innerhalb des Baustoffes keine Wärmequellen vorhanden sind. Hier interessiert auch nur dieser Fall.

Für das Folgende wird angenommen, daß λ, c und ϱ reine Ortsfunktionen sind, insbesondere also nicht von der Temperatur U abhängen.

Geht man mit dem *Fourier*schen Ansatz (1) in die Bilanzgleichung (2) hinein, so erhält man die bekannte Wärmeleitungsgleichung in der Form

$$c \cdot \varrho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U) . \tag{3}$$

Die Differentialgleichung ist linear und homogen und hat überdies die Eigenschaft, durch jede Konstante befriedigt zu werden.

Die Wärmeleitungsgleichung besitzt eine umfangreiche Mannigfaltigkeit von Lösungen, aus der eine spezielle Lösung erst durch Vorgabe zusätzlicher Bedingungen ausgewählt wird. Insbesondere hat man Randbedingungen vorzuschreiben, also Bedingungen, die an den Rändern des betrachteten und von fester Materie ausgefüllten Gebietes erfüllt sein müssen.

Im Hinblick auf den Anwendungszweck ist es sinnvoll, an den Oberflächen der Innenräume sogenannte Randbedingungen dritter Art vorzuschreiben, die letztenendes auf die Vorgabe einer Innenlufttemperatur für jeden Raum hinauslaufen. Diese Innenlufttemperatur kann zwar noch von der Zeit abhängen, soll aber innerhalb eines Raumes nicht mit dem Ort variieren. Diese thermische Ankopplung der Innenraumoberfläche an die Innenluft stellt eine in der Mehrzahl der Fälle zulässige Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse dar, beschreibt diese jedoch nicht exakt. Sie berücksichtigt den langwelligen Strahlungsaustausch im Raum nur sehr indirekt, erweist sich aber als effektiv einzige Möglichkeit, den Rechenaufwand zur Lösung der in der Praxis auftretenden Probleme in vertretbaren Grenzen zu halten. Auch wäre bei Berücksichtigung zu vieler Details der für eine vernünftige Planung notwendige Überblick über die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge kaum zu gewinnen.

Die Randbedingungen an der Außenseite des Gebäude unterscheiden sich von denen an den Innenraumgrenzen nur dadurch, daß man hier eine Ortsabhängigkeit der „Lufttemperatur" zulassen wird. Dies erweist sich als notwendig, da an der äußeren Begrenzung die Strahlungseinflüsse – insbesondere jene der Sonneneinstrahlung – keinesfalls vernachlässigt werden dürfen. Daß diese Strahlungseinflüsse in der Vorgabe der „Lufttemperatur" berücksichtigt werden können, ist seit langem bekannt [7; 8; 9]. Der Ortsabhängigkeit der Außenlufttemperatur wird man im Normalfall dadurch Rechnung tragen, daß man mehrere „Außenräume" – mit jeweils ortsunabhängiger Lufttemperatur – einführt. Auch bei bodenberührten Bauteilen erweist sich eine solche Vorgangsweise als nützlich. Die Untersuchung der Auswirkungen wandernder Schattengrenzen ist auf diese Weise natürlich nicht möglich; sie bleibt Spezialuntersuchungen nach anderen Konzepten vorbehalten.

Die gegebenen Raumlufttemperaturen T_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, führen unter Berücksichtigung der Wärmeübergangskoeffizienten α_k auf Randbedingungen dritter Art – siehe hierzu [10], Seite 75. Für den Rand $\mathscr{R}_k$, also den von der Luft des k-ten Raumes bestrichenen Teil der Oberfläche des betrachteten Gebäudes, lautet diese Bedingung:

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} U) \cdot \vec{n} + \alpha_k \cdot U = \alpha_k \cdot T_k . \tag{4}$$

Hierin bedeutet $\vec{n}$ den in den k-ten Raum weisenden Normaleneinheitsvektor der Bauteiloberfläche.

Die Randbedingung (4) ist für jeden beteiligten Raum zu formulieren. Sind dadurch noch nicht alle Begrenzungen der Konstruktion erfaßt, so hat man noch weitere Randbedingungen anzusetzen. Verlangt man, daß durch diese künstlich geschaffenen Ränder keine Wärme hindurchtritt, so kommt man auf Randbedingungen der zweiten Art (siehe [10], Seite 75):

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} U) \cdot \vec{n} = 0 . \tag{5}$$

Da uns auch damit nur ein Sonderfall der Randbedingung dritter Art begegnet, können wir das Weitere unter der Annahme abhandeln, es wären längs sämtlicher Berandungen Randbedingungen der dritten Art gegeben.

Die Vorgabe von Randbedingungen reicht noch nicht zur eindeutigen Festlegung einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3) aus. Man hat zusätzlich entweder eine Anfangsbedingung einzuführen, d. h. die Temperaturverteilung in der Baukonstruktion für einen bestimmten Anfangszeitpunkt vorzuschreiben, oder aber die Lösung einer anderen geeigneten Bedingung zu unterwerfen.

Anfangsbedingungen interessieren in dem hier besprochenen Zusammenhang nicht. An ihre Stelle tritt, wo dies angängig ist, häufig die Forderung nach Zeitunabhängigkeit der Lösung. In diesem Fall verschwindet die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung (3); dieser Fall ist in [11] abgehandelt. Bei einer Untersuchung der Wärmespeicherung kann man sich natürlich nicht auf diesen Fall – den stationären Fall – beschränken. Die interessieren-

den Auswirkungen der zeitweiligen Wärmespeicherung in der Baukonstruktion treten ja nur zutage, wenn man das tägliche auf und ab der Außenlufttemperatur und die vorwiegend ebenfalls im Tagesrhythmus stattfindenden Innenlufttemperaturschwankungen berücksichtigt. Dies legt es nahe, anstelle der Vorgabe einer Anfangsbedingung die Periodizität aller ablaufenden Vorgänge ins Auge zu fassen.

Einen zeitlich periodischen Temperaturverlauf kann man immer durch eine *Fourier*-Reihe erfassen, also in der Form

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} u_\nu(x, y, z) \cdot e^{i \cdot \frac{\nu \cdot \pi \cdot t}{l}} \qquad (6)$$

anschreiben; hierin bedeutet 2l die zeitliche Periode des Vorganges. Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (3) hinein und führt einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man für den *Fourier*koeffizienten $u_\nu(x, y, z)$ die Differentialgleichung

$$i \cdot c \cdot \varrho \cdot \frac{\nu \cdot \pi}{l} \cdot u_\nu = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u_\nu). \qquad (7)$$

Mit der Abkürzung $\frac{\nu \cdot \pi}{l} = \omega$ und nach Weglassen des für das Verständnis unwesentlichen Index ν wird daraus

$$i \cdot c \cdot \varrho \cdot \omega \cdot u = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u), \qquad (8)$$

eine Differentialgleichung für den *Fourier*koeffizienten u, in der naturgemäß die Zeit nicht mehr vorkommt.

Die *Fourier*koeffizienten u der Temperatur U sind leicht anschaulich zu interpretieren. Bei verschwindender Kreisfrequenz – $\omega = 0$ – fällt man auf den stationären Fall zurück. Für $\omega = 0$ wird u zum zeitlichen Mittelwert der Temperatur U – jeweils an der betrachteten Stelle. Für den zur Tagesperiode gehörigen Wert der Kreisfrequenz ω hat man, wie für jeden von Null verschiedenen Wert von ω, keine reellen Lösungen der Differentialgleichung (8) zu erwarten, sondern komplexwertige Funktionen. Der komplexe Wert von u liefert mit seinem Absolutbetrag die (reelle) Amplitude des sinusförmigen Verlaufes der Temperatur U, mit seinem Argument die Phasenlage.

Wir wollen im folgenden u auch als „komplexe Amplitude" der zu ω gehörigen Harmonischen des Temperaturverlaufes bezeichnen. Sie hat natürlich die Dimension einer Temperatur.

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (8) kann durch die Angabe von Randbedingungen eindeutig festgelegt werden; Anfangsbedingungen sind nicht erforderlich, da in (8) die Zeit nicht auftritt. Die Randbedingungen zu Differentialgleichung (8) ergeben sich aus den für die instationäre Wärmeleitungsgleichung formulierten Randbedingungen (4) durch Übergang zu den *Fourier*koeffizienten:

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} u) \cdot \vec{n} + \alpha_k \cdot u = \alpha_k \cdot t_k. \qquad (9)$$

Das Lösen einer Randwertaufgabe dieser Art ist nur in wenigen Fällen in geschlossener Form möglich. Im allgemeinen muß man sich numerischer Methoden unter Einsatz der EDV bedienen. Diesen Aufwand treibt man nicht gerne immer wieder, wenn neue Randwerte – in unserem Fall neue *Fourier*koeffizienten von Raumlufttemperaturen – berücksichtigt werden sollen.

Eine Verringerung des Aufwandes wird möglich, weil der Linearität und Homogenität der Differentialgleichung (8) wegen die Superposition von Lösungen stets wieder auf Lösungen der Differentialgleichung führt. Dementsprechend genügt es, eine Anzahl von „Basislösungen" zu berechnen, um später diese Basislösungen zu jener Lösung linear zu kombinieren, die den realen Randbedingungen genügt.

Wir definieren eine Basislösung $g_j(x, y, z)$ dadurch, daß wir im Raum j die Amplitude t_j mit dem Wert 1 vorschreiben, in allen anderen Räumen mit dem Wert 0. Die Basislösungen sind demnach durch die Randbedingungen

$$(\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot \vec{n} + \alpha_k \cdot g_j = \alpha_k \cdot \delta_{kj} \qquad (10)$$

für $j = 0, 1, \ldots, m$ an allen Rändern $\mathscr{R}_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$ festgelegt. In dieser Gleichung gilt das *Einstein*sche Summationsübereinkommen nicht; δ_{kj} bedeutet das *Kronecker*-Symbol.

Die zu vorgegebenen *Fourier*koeffizienten t_j der Raumlufttemperaturen gehörige Lösung $u(x, y, z)$ der Differentialgleichung (8) wird dann durch die Linearkombination

$$u(x, y, z) = \sum_{j=0}^{m} t_j \cdot g_j(x, y, z) \qquad (11)$$

der Basislösungen dargestellt. Die Basislösungen sind ihrer Definition entsprechend dimensionslos. Der *Fourier*koeffizient u erhält die Dimension einer Temperatur durch die *Fourier*koeffizienten t_j der Lufttemperaturen.

Mit der Berechnung der *Fourier*koeffizienten $u(x, y, z)$ – man hat sie selbstverständlich für alle benötigten Harmonischen durchzuführen – bereitet die Darstellung des raumzeitlichen Temperaturverlaufes $U(x, y, z, t)$ keine Schwierigkeiten: man muß nur in Gleichung (6) einsetzen und die Summation durchführen.

In der Praxis sind im Grunde genommen nur die Tagesperiode und die Jahresperiode von Bedeutung, letztere speziell im Zusammenhang mit erdberührten Bauteilen. In manchen Fällen mag es auch noch sinnvoll sein, eine siebentägige Periode in Betracht zu ziehen, und zwar dann, wenn die Raumlufttemperaturen nutzungsbedingt diese Periode aufweisen.

3. Das Leitwertkonzept

Die Berechnung der Temperaturverteilung in einer Baukonstruktion ist nicht Selbstzweck. Zwar interessieren die innerhalb von Bauteilen und an ihren Oberflächen auftretenden Temperaturen auch – speziell in Zusammenhang mit Feuchtigkeitsproblemen ist dies der Fall –, doch steht vielfach eine andere Frage im Vordergrund: welcher Wärmestrom fließt über die Berandung eines Raumes ab, wenn man der Raumluft eine bestimmte Temperatur oder einen bestimmten zeitlichen Temperaturverlauf auf-

zwingt? Ersichtlich handelt es sich hier um die Frage nach der zum Temperieren eines Raumes notwendigen Heizleistung in diesem Raum.

Der aus dem Raum i über seinen Rand $\mathscr{R}_i$ abfließende Wärmestrom Q_i ist offenbar gegeben durch

$$Q_i = -\iint_{\mathscr{R}_i} (\lambda \cdot \operatorname{grad} U) \cdot d\vec{a}, \tag{12}$$

worin $d\vec{a}$ das vom Raum zum Bauteil hin orientierte Oberflächenelement ist. Für den *Fourier*koeffizienten q_i des Wärmestromes Q_i gilt entsprechend

$$q_i = -\iint_{\mathscr{R}_i} (\lambda \cdot \operatorname{grad} u) \cdot d\vec{a}. \tag{13}$$

Setzt man hier für den *Fourier*koeffizienten $u(x, y, z)$ den Ausdruck aus Gleichung (11) ein, so erhält man

$$q_i = -\sum_j t_j \cdot \iint_{\mathscr{R}_i} (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a}. \tag{14}$$

Den Wert des Oberflächenintegrals, in dessen Integranden die j-te Basislösung g_j aufscheint, und das über den Rand $\mathscr{R}_i$ des i-ten Raumes erstreckt ist, wollen wir mit L_{ij} bezeichnen:

$$L_{ij} = \iint_{\mathscr{R}_i} (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a}. \tag{15}$$

Die Größe L_{ij} hat die Dimension eines thermischen Leitwertes. Wir wollen sie ab nun als „verallgemeinerten Leitwert" bezeichnen. Bei der Kreisfrequenz $\omega = 0$, also im stationären Fall bzw. für die 0-te Harmonische, geht L_{ij} in den bekannten reellen stationären thermischen Leitwert über – siehe [11; 12]. Für $\omega \neq 0$ wird L_{ij} komplexwertig.

Gleichung (14) nimmt nun die Form

$$q_i = -\sum_j L_{ij} \cdot t_j \tag{16}$$

an. Läßt man hier i von 0 bis m laufen, so erhält man ein Gleichungssystem, das die komplexen Lufttemperaturamplituden t_j mit den komplexen Heizleistungsamplituden q_i verknüpft. Daß die q_i als Heizleistungsamplituden interpretiert werden können, setzt eine Vernachlässigung der Wärmespeicherfähigkeit der Raumluft bei Aufheiz- und Abkühlvorgängen voraus; in diesem Fall müssen ja tatsächlich die über die Raumberandungen abfließenden Wärmeströme zu jedem Zeitpunkt mit den in der Raumluft erbrachten Heizleistungen übereinstimmen.

Für stationäre Verhältnisse, also für $\omega = 0$, ist die Leitwertmatrix L_{ij} und ihre Bedeutung in [11] ausführlich erörtert. Für $\omega \neq 0$ soll zunächst der Nachweis der Symmetrie der Matrix der verallgemeinerten Leitwerte L_{ij} erbracht werden; er erfolgt in analoger Weise zum Nachweis der Symmetrie der stationären Leitwertmatrix in [11] und kann daher kurz gehalten werden.

Die Definitionsgleichung (15) der verallgemeinerten Leitwerte kann auch in der Form

$$L_{ij} = \sum_k \iint_{\mathscr{R}_k} \delta_{ki} \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a} \tag{17}$$

geschrieben werden. Für das Kronecker-Symbol δ_{ki} ergibt sich aus der Randbedingung (10) die Darstellung

$$\delta_{ki} = g_i + \frac{1}{\alpha_k} \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_i) \cdot \vec{n}. \tag{18}$$

Setzt man dies in (17) ein, so folgt

$$L_{ij} = \sum_k \iint_{\mathscr{R}_k} g_i \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a} + \\ + \sum_k \iint_{\mathscr{R}_k} \frac{1}{\alpha_k} \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_i) \cdot \vec{n} \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a}. \tag{19}$$

Die erste Summe stellt ein Oberflächenintegral über den gesamten Rand $\mathscr{R}$ dar. Setzt man in der zweiten Summe $d\vec{a} = -\vec{n}\,da$[1]), so erhält man

$$L_{ij} = \oiint_{\mathscr{R}} g_i \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a} - \\ - \sum_k \iint_{\mathscr{R}_k} \frac{1}{\alpha_k} \cdot [(\lambda \cdot \operatorname{grad} g_i) \cdot \vec{n}] \cdot \\ \cdot [(\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot \vec{n}] \cdot da. \tag{20}$$

Das Integral hinter dem Summenzeichen ist in i und j symmetrisch. Das Oberflächenintegral über den Gesamtrand $\mathscr{R}$ läßt sich nach *Gauß* umformen in

$$\oiint_{\mathscr{R}} g_i \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a} = -\iiint_{\mathscr{G}} [\operatorname{grad} g_i \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) + \\ + g_i \cdot \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j)] \cdot dG. \tag{21}$$

Unter Verwendung der Differentialgleichung (8), die ja für die Basislösung g_j erfüllt sein muß, wird daraus

$$\oiint_{\mathscr{R}} g_i \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) \cdot d\vec{a} = -\iiint_{\mathscr{G}} [\operatorname{grad} g_i \cdot (\lambda \cdot \operatorname{grad} g_j) + \\ + i \cdot c \cdot \varrho \cdot \omega \cdot g_i \cdot g_j]\, dG. \tag{22}$$

Ersichtlich ist auch dieses Integral in i und j symmetrisch. Auch für die verallgemeinerten Leitwerte gilt also

$$L_{ij} = L_{ji}. \tag{23}$$

Die praktische Bedeutung der verallgemeinerten Leitwerte läßt sich aus Gleichung (16) ablesen. Diese stellt eine Beziehung zwischen den Amplituden t_j der Raumlufttemperaturen einerseits und den Amplituden q_i der Heizleistungen in den Räumen andererseits her. Die reellen Leitwerte des stationären Falles leisten das Gleiche für die Temperaturmittelwerte und Heizleistungsmittelwerte – siehe [11].

Damit ist das Gleichungssystem (16), das natürlich sowohl für die Mittelwerte (stationär) als auch für jede interessierende Harmonische angeschrieben zu denken ist, das grundlegende Gleichungssystem für die Heizlastberechnung; es eignet sich sogar für die in den Normenwerken im allgemeinen nicht vorgesehene instationäre („dynamische") Heizlastberechnung. Zu beachten ist, daß sich das Gleichungssystem (16) ebensogut zur Berechnung von Raumlufttemperaturen (Mittelwerte und

[1]) Hier findet sich in [11] ein Vorzeichenfehler, der auf das Resultat jedoch keinen Einfluß hat.

komplexe Amplituden) bei gegebenen bzw. teilweise gegebenen Heizleistungen eignet. Insbesondere stellt es auch die wesentliche Grundlage zur Berechnung sommerlicher Innentemperaturverläufe in den Innenräumen eines Gebäudes dar. Daß die q_i Heizleistungsamplituden (auch Mittelwerte) in der Raumluft darstellen, nicht aber im Inneren oder an den Berandungen von Bauteilen, spielt, wie in einem gesonderten Beitrag noch gezeigt werden soll, keine Rolle.

4. Das wirksame Speichervermögen

Bei periodischen Aufheiz- und Abkühlvorgängen – man denkt dabei meist an die Tagesperiode – bewirkt eine gegebene Heizleistungsamplitude je nach Bauweise im betrachteten Raum kleinere oder größere Temperaturschwankungen. Umgekehrt: zur Erzeugung einer bestimmten Temperaturamplitude in der Raumluft bedarf es in einem Leichtbau nur einer relativ kleinen Heizleistungsamplitude, in einem Gebäude mit dicken und schweren Massen einer großen.

Das Wärmespeichervermögen eines homogenen Körpers der Masse m mit der spezifischen Wärmekapazität c ist bekanntlich durch $m \cdot c$ gegeben, d.h. die Erhöhung δE der gespeicherten Wärmemenge ergibt sich aus der Temperaturerhöhung δT gemäß

$$\delta E = m \cdot c \cdot \delta T. \tag{24}$$

Ist sichergestellt, daß die Erwärmung im ganzen Körper gleichmäßig erfolgt, so gilt diese Gleichung während eines Erwärmungs- oder Abkühlungsvorganges für jedes beliebige Zeitintervall. In diesem fiktiven Grenzfall kann man auch zu den Zeitableitungen übergehen und

$$\frac{dE}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} \tag{25}$$

schreiben. Die linke Seite stellt den dem Körper zugeführten Wärmestrom Q dar:

$$Q = m \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}. \tag{26}$$

Die Temperatur T ist jene einheitliche Temperatur, die sowohl im Körper als auch in seiner Umgebung auftritt. Schwankt diese periodisch mit der Amplitude θ, so ist

$$T = \theta \cdot \sin \omega t. \tag{27}$$

Einsetzen in (26) liefert

$$Q = m \cdot c \cdot \theta \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \tag{28}$$

also einen Wärmestrom mit der Amplitude

$$\Gamma = m \cdot c \cdot \omega \cdot \theta. \tag{29}$$

Für das Speichervermögen $m \cdot c$ folgt daraus

$$m \cdot c = \frac{\Gamma}{\omega \cdot \theta}. \tag{30}$$

Diese Gleichung kann man auch dann, wenn keine gleichmäßige Temperaturverteilung im Körper vorliegt, zur Definition des „wirksamen Speichervermögens" Ξ eines Raumes heranziehen.

Diese Erklärung des wirksamen Speichervermögens ist zwar plausibel, doch sicher unvollständig. Läßt man die Lufttemperatur im Raum in vorgegebener Weise schwanken, so hängt die Amplitude des durch die Raumbegrenzungen hindurchtretenden Wärmestromes – also die erforderliche Heizleistungsamplitude – noch davon ab, welche Randbedingungen in den anderen Räumen des Gebäudes vorliegen, natürlich auch in den „Außenräumen".

Von den vielen denkbaren Möglichkeiten sollen hier nur zwei betrachtet werden:

- In allen Räumen außer dem jeweils betrachteten mögen die Temperaturen konstant sein, die Temperaturamplituden also verschwinden.
- In allen Räumen sollen gleiche Temperaturverläufe auftreten, also insbesondere auch gleiche Temperaturamplituden[2]).

Sehr einfach ist der erste Fall abzuhandeln. Interessiert man sich für das Wärmespeichervermögen des Raumes i, so reduziert sich wegen der in den anderen Räumen verschwindenden Temperaturamplituden Gleichung (16) auf

$$q_i = -L_{ii} \cdot t_i. \tag{31}$$

Für das gesuchte wirksame Speichervermögen Ξ_i, ergibt sich dann

$$\Xi_i = \frac{|L_{ii}|}{\omega}. \tag{32}$$

Dieses verblüffend einfache Resultat liefert gleichzeitig eine anschauliche Interpretation für die Hauptdiagonalglieder der verallgemeinerten Leitwertmatrix. Man erkennt allerdings auch, daß das wirksame Speichervermögen Ξ_i weniger Information erhält, als der komplexe verallgemeinerte Leitwert L_{ii}. Es enthält nicht die Phasenverschiebung zwischen Heizleistungsgang und Temperaturgang. Man darf daher auch bei thermischer Parallelschaltung wirksame Speichervermögen in allgemeinen nicht addieren, thermische Leitwerte hingegen schon.

Auch im zweiten Fall wird auf Gleichung (16) zurückgegriffen, nur ist diesmal für alle Räume die gleiche Temperaturamplitude einzusetzen. Diese – wir wollen sie mit t^* bezeichnen – läßt sich aus der Summe herausheben. Man erhält

$$q_i = -t^* \cdot \sum_{j=0}^{m} L_{ij}. \tag{33}$$

Für das zu diesen Randbedingungen gehörige wirksame Speichervermögen Ξ_i^* ergibt sich daraus

$$\Xi_i^* = \frac{|q_i|}{\omega \cdot |t^*|} = \frac{1}{\omega} \cdot \left| \sum_{j=0}^{m} L_{ij} \right|. \tag{34}$$

[2]) Die Temperaturmittelwerte dürfen sich durchaus unterscheiden.

Dieses wirksame Speichervermögen ist also durch den absoluten Betrag der zum Raum i gehörigen Zeilen- oder Spaltensumme der Leitwert-Matrix bestimmt.

In der Praxis wird man für rohe Abschätzungen das kleinere der beiden Speichervermögen Ξ_i und Ξ_i^* heranziehen. Natürlich besteht auch die Möglichkeit, die Absolutbeträge aller L_{ii} enthaltenden Teilsummen der Matrixzeile zu berechnen und den kleinsten davon zu verwenden. Ob eine solche Vorgangsweise sinnvoll ist, mag jedoch dahingestellt bleiben, da die Kenntnis wirksamer Speichervermögen alleine für einigermaßen genaue quantitative Aussagen aus den zuvor erwähnten Gründen sicher nicht hinreicht. Sehr gute Dienste kann der Begriff des wirksamen Speichervermögens hingegen bei der Veranschaulichung der komplexen verallgemeinerten Leitwerte leisten.

Der Begriff des wirksamen Speichervermögens ist nicht neu, wenngleich er meines Wissens in dieser Allgemeinheit in der Literatur nicht zu finden ist. Für den Fall der eindimensionalen Wärmeleitung können in einfachen Fällen wirksame Speichervermögen auch formelmäßig dargestellt werden; in komplizierteren Fällen lassen sie sich mit Hilfe einfacher Algorithmen (Matrizenmethode) berechnen[3]).

5. Beispiel

Die Anwendungsmöglichkeiten der hier eingeführten Begriffe, insbesondere die der Leitwert-Matrizen, sollen nun anhand eines einfachen Beispieles dargelegt werden. Um das Wesentliche deutlich hervortreten zu lassen, wird eine fiktive Baukonstruktion als zweidimensionaler Wärmeleitungsfall herangezogen und numerisch durchgerechnet. Das Beispiel ist im Hinblick auf den hier verfolgten Zweck aller konstruktiven Details entkleidet. Das bedeutet nicht, daß mit den hier entwickelten Begriffen und den für die numerische Rechnung verwendeten EDV-Programmen praxisgerechte Aufgaben nicht behandelt werden können. Die Primitivität des Beispieles soll nur dem Zweck einer besseren Übersicht dienen.

Betrachtet wird ein aus drei Innenräumen bestehendes Gebäude (zweidimensional), wie es in *Bild 2* dargestellt ist.

Alle Wände mit Ausnahme der Trennwand zwischen Raum 1 und 2 bestehen aus Beton mit der Massendichte $\varrho = 2300\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, der spezifischen Wärmekapazität $c = 1130\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ und der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 2{,}3\ \mathrm{Wm^{-1}\,K^{-1}}$. Die Trennwand zwischen Raum 1 und Raum 2 ist eine Gipswand mit $\varrho = 600\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, $c = 840\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ und $\lambda = 0{,}29\ \mathrm{Wm^{-1}\,K^{-1}}$. Alle Außenwände mit Ausnahme der linken Wand des Raumes 1 tragen eine Außendämmung von 0,1 m Dicke mit $\varrho = 20\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, $c = 1400\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ und $\lambda = 0{,}041\ \mathrm{Wm^{-1}\,K^{-1}}$. Außerdem besitzt die in der Abbildung nach oben weisende Außenwand von Raum 1 eine Innendämmung von 0,05 m Dicke aus dem gleichen Material. Türen, Fenster etc. wurden mit Absicht aus Gründen der Einfachheit für dieses Beispiel nicht vorgesehen. Die Abmessungen sind *Bild 2* zu entnehmen. An der Außenseite wird ein Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_e = 20\ \mathrm{Wm^{-2}\,K^{-1}}$ angenommen, an der Innenseite generell $\alpha_i = 8\ \mathrm{Wm^{-2}\,K^{-1}}$.

Mit einem eigens für derartige Zwecke entwickelten EDV-Programm [13] wurden auf einem PC (80486) zunächst alle vier Basislösungen sowohl für den stationären Fall (Mittelwerte) als auch für die 24-stündige Periode berechnet, anschließend gemäß Gleichung (15) die (längenbezogenen) Leitwerte. Für die stationäre Leitwert-Matrix ergibt sich

$$\mathscr{L}_\infty = \begin{pmatrix} -35{,}401 & 26{,}093 & 2{,}576 & 6{,}732 \\ 26{,}093 & -35{,}749 & 9{,}656 & 0{,}000 \\ 2{,}576 & 9{,}656 & -26{,}021 & 13{,}789 \\ 6{,}732 & 0{,}000 & 13{,}789 & -20{,}521 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

für die Matrix der verallgemeinerten Leitwerte zur 24-stündigen Periode

$$\mathscr{L}_{24} = \begin{pmatrix} -64{,}112- & 12{,}873- & 0{,}010- & -0{,}268+ \\ -33{,}137\cdot i & -13{,}827\cdot i & -0{,}386\cdot i & +0{,}015\cdot i \\ 12{,}873- & -53{,}469- & 7{,}244- & -0{,}000- \\ -13{,}827\cdot i & -15{,}908\cdot i & -3{,}823\cdot i & -0{,}000\cdot i \\ 0{,}010- & 7{,}244- & -79{,}222- & -1{,}307- \\ -0{,}386\cdot i & -3{,}823\cdot i & -21{,}626\cdot i & -0{,}276\cdot i \\ -0{,}268+ & -0{,}000- & -1{,}307- & -132{,}035- \\ +0{,}015\cdot i & -0{,}000\cdot i & -0{,}276\cdot i & -26{,}950\cdot i \end{pmatrix}. \quad (36)$$

In der Matrix $\mathscr{L}_\infty$ sind die Hauptdiagonalglieder nicht von Interesse; sie gewährleisten bloß, wie in [11] geschildert, das Verschwinden der Zeilensummen. Aus (35) entnimmt man, daß Raum 1 thermisch am stärksten an

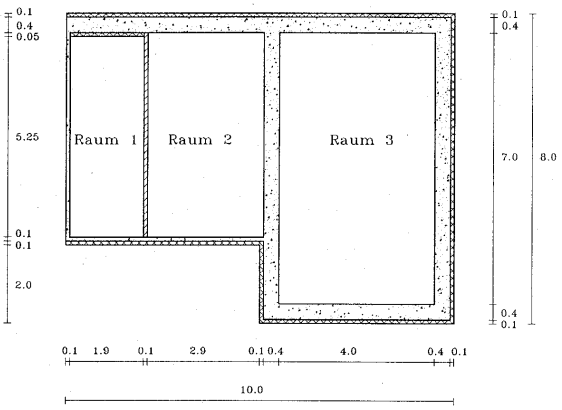

Bild 2. Skizze des betrachteten Gebäudes, Maße in Metern.

[3]) In [6] wurde es offen gelassen, ob das wirksame Speichervermögen eines Bauteiles mit oder ohne Berücksichtigung der Wärmeübergangswiderstände zu berechnen ist. Hierzu sei betont, daß sich die diesbezügliche Festlegung stark auf den berechneten Wert des Speichervermögens auswirken kann.

die Außenluft (Raum 0) angekoppelt ist – der längenbezogene Leitwert beträgt 26,093 $Wm^{-1}K^{-1}$. Raum 2 ist mit einem längenbezogenen Leitwert von 2,576 $Wm^{-1}K^{-1}$ am schwächsten an die Außenluft gekoppelt.

Auch die mittlere thermische Verkopplung der Innenräume läßt sich aus (35) direkt ablesen. Raum 1 und Raum 3 sind praktisch nicht verkoppelt; der mit 0,000 $Wm^{-1}K^{-1}$ in (35) ausgewiesene Leitwert zwischen diesen Räumen ergibt sich aus der Rechnung zu $1{,}175 \cdot 10^{-4}$ $Wm^{-1}K^{-1}$ und schlägt daher auf die drei ausgewiesenen Stellen nicht durch.

Der Leitwert zwischen den Räumen 1 und 2, die in der Hauptsache durch die Gipstrennwand thermisch verbunden sind, ergibt sich aus der zweidimensionalen Rechnung zu 9,656 $Wm^{-1}K^{-1}$. Der k-Wert dieser Wand beträgt 1,681 $Wm^{-2}K^{-1}$; multipliziert man diesen mit der Länge der Wand (Innenmaß 5,3 m), so erhält man nur einen Leitwert von 8,910 $Wm^{-1}K^{-1}$, also, wie zu erwarten, einen zu kleinen Wert.

Der Leitwert zwischen den Räumen 2 und 3 ist in (35) mit 13,789 $Wm^{-1}K^{-1}$ ausgewiesen; der eindimensional berechnete Leitwert ergibt sich auch hier größenordnungsmäßig passend.

Die Verwendung der Leitwertmatrix $\mathscr{L}_\infty$ für eine stationäre Heizlastberechnung soll hier nicht näher erörtert werden; siehe hierzu [14].

Die verallgemeinerte Leitwert-Matrix $\mathscr{L}_{24}$ – Gleichung (36) – läßt sich in ihrer Bedeutung nicht ohne weiteres auf einen Blick erfassen. Etwas leichter diskutierbar wird diese Matrix, wenn man zunächst nur die absoluten Beträge ihrer Elemente betrachtet. Die Matrix der Beträge der verallgemeinerten Leitwerte zur Periode 24 Stunden hat in diesem Beispiel das Aussehen

$$\begin{pmatrix} 72{,}169 & 18{,}892 & 0{,}386 & 0{,}268 \\ 18{,}892 & 55{,}785 & 8{,}191 & 0{,}000 \\ 0{,}386 & 8{,}191 & 82{,}121 & 1{,}336 \\ 0{,}268 & 0{,}000 & 1{,}336 & 134{,}757 \end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Die Hauptdiagonalglieder lassen sich gemäß Gleichung (32) durch Division mit der Kreisfrequenz ω in die wirksamen Speichervermögen Ξ_i umrechnen. Für die Tagesperiode hat ω den Wert $\frac{\pi}{12}\,h^{-1}$ ($0{,}2618\,h^{-1}$). Der zum Außenraum gehörige Wert Ξ_0 beträgt demnach $\frac{72{,}169}{\omega} =$ 275,7 $Whm^{-1}K^{-1}$; er hat jedoch keine praktische Bedeutung.

Der Wert 55,785 $Wm^{-1}K^{-1}$ in Matrix (37) besagt, daß eine Heizleistungsamplitude (längenbezogen) von 55,785 Wm^{-1} im Raum 1 dort eine Temperaturamplitude von 1 K hervorruft, wenn in allen anderen Räumen – auch außen – die Temperatur konstant gehalten wird, die zugehörigen Temperaturamplituden also verschwinden; das wirksame Speichervermögen Ξ_1 von Raum 1 hat den Wert $\frac{55{,}785}{\omega} = 213{,}1$ $Whm^{-1}K^{-1}$.

Raum 2 besitzt mit $\Xi_2 = \frac{82{,}121}{\omega} = 313{,}7$ $Whm^{-1}K^{-1}$ schon ein größeres Wärmespeichervermögen als Raum 1. Das größte Wärmespeichervermögen besitzt mit $\Xi_3 = \frac{134{,}757}{\omega} = 514{,}7$ $Whm^{-1}K^{-1}$ Raum 3. Ein Blick auf *Bild 2* läßt diese Ergebnisse sehr plausibel erscheinen.

Auch die Nichtdiagonalglieder der Matrix (37) gestatten eine einfache anschauliche Interpretation. Zur Erläuterung sei das zu den Räumen 1 und 2 gehörige Wechselwirkungsglied herausgegriffen, das in (37) mit dem Wert 8,191 $Wm^{-1}K^{-1}$ aufscheint. Dies ist der Absolutbetrag des verallgemeinerten Leitwertes mit den Indizes 1 und 2. Ein Blick auf Gleichung (15) zeigt sofort die Bedeutung dieses Leitwertes. Wegen $i = 1$ wird die Integration der Wärmestromdichte über den Rand des Raumes 1 durchgeführt, also die Wärmestromamplitude in Raum 1 ermittelt. Wegen $j = 2$ wird die zu Raum 2 gehörige Basislösung herangezogen, bei der im Raum 2 und nur in diesem eine Temperaturamplitude vom Betrag 1 auftritt; alle anderen Temperaturamplituden verschwinden. Der angegebene Wert von 8,191 $Wm^{-1}K^{-1}$ besagt daher, daß dem Raum 1 Wärme mit einer Amplitude (längenbezogen) von 8,191 Wm^{-1} zugeströmt bzw. entzogen wird, wenn in Raum 2 die Temperatur mit einer Amplitude von 1 K schwankt.

Bei Temperaturschwankungen tritt zwischen den Innenräumen 1 und 2 die stärkste Wechselwirkung auf, zwischen den Räumen 1 und 3 erwartungsgemäß nur eine vernachlässigbare.

Schwankungen der Außenlufttemperatur schlagen auf die Innenräume unterschiedlich durch, auf Raum 1 mit 18,892 $Wm^{-1}K^{-1}$, auf die beiden anderen Räume im Vergleich dazu nur wenig.

Auf die Matrix $\mathscr{L}_{24}$ der komplexen verallgemeinerten Leitwerte in Gleichung (36) läßt sich das zuvor Gesagte leicht verallgemeinern. Sie liefert neben den soeben besprochenen Absolutbeträgen auch noch die Phasenlagen bzw. Phasenverschiebungen zwischen Wärmeströmen und Temperaturen für die Periode von 24 Stunden.

Die Bestimmung der wirksamen Speichervermögen Ξ_i^* aus der verallgemeinerten Leitwert-Matrix (36) – nicht aus der Matrix (37) – sei dem Leser überlassen. Man erkennt dabei auch, daß die Berechnung eines wirksamen Speichervermögens für den Innenraum 1 der starken Ankopplung an die Außenluft wegen nur wenig sinnvoll ist. In der Praxis wird diese Situation durch das Vorhandensein von Fenstern noch wesentlich verschärft.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Eine korrekte Behandlung von Wärmespeicherungsvorgängen in einer Baukonstruktion ist nur möglich, wenn man die instationären Wärmeleitungsvorgänge in der Baukonstruktion beherrscht. Das hier vorgestellte Konzept bleibt nur scheinbar auf periodisch eingeschwungene Vorgänge beschränkt, da eine Verallgemeinerung auf aperiodische Vorgänge unter Verwendung der Laplace-Transformation grundsätzlich möglich ist [15].

Den für die bauphysikalische Praxis wichtigsten Teil dieser Arbeit stellt die Verallgemeinerung des für den stationären Fall schon bekannten Leitwertbegriffes auf periodische Vorgänge dar. Sie liefert die Grundlage für die Berechnung des wärmetechnischen Verhaltens ganzer Gebäude unter Berücksichtigung zwei- und dreidimensionaler Wärmeleitungsvorgänge, ohne den Aufwand gegenüber eindimensionalen instationären Berechnungen nennenswert zu erhöhen.

Die Erörterung von wirksamen Speichervermögen dient nur der Veranschaulichung und soll keineswegs als Empfehlung zur Verwendung dieses Begriffes bei bauphysikalischen Untersuchungen aufgefaßt werden.

Auf die für die Praxis wichtige Erörterung der Auswirkungen von Wärmequellen wurde hier verzichtet; sie soll einer eigenen Arbeit vorbehalten bleiben.

Literatur

[1] *Bruckmayer, F.:* Der praktische Wärme- und Schallschutz im Hochbau. Verlag: Franz Deuticke, Wien 1949.

[2] *Sklover, A. M.:* Die Wärmeübertragung periodischer Wärmeprozesse. Moskau 1952.

[3] *Heindl, W.:* Neue Methoden zur Beurteilung des Wärmeschutzes im Hochbau. Die Ziegelindustrie H. 4, 5, 6 (1967).

[4] *Haferland, F., Heindl, W.* und *Fuchs, H.:* Ein Verfahren zur Ermittlung des wärmetechnischen Verhaltens ganzer Gebäude unter periodisch wechselnder Wärmeeinwirkung und rechnerische Untersuchungen zur Ermittlung der Größenordnung bestimmter Einflüsse von Bauweise und Konstruktion sowie sonstiger Parameter auf die Temperaturstabilität in Räumen. Berichte aus der Bauforschung H. 99, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn Berlin–München–Düsseldorf 1975.

[5] *Carslaw, H. S.* und *Jaeger, J. C.:* Conduction of heat in solids. Second edition, Oxford University Press 1959.

[6] *Heindl, W.:* Wärmespeicherung in Wänden und Decken. Forschungsbericht 117, Beilage 3, Österreichisches Institut für Bauforschung, Wien 1974.

[7] *Mackey, C. O.* und *Wright, L. T.:* Periodic heat flow – homogeneous walls and roofs. ASHVE Transactions Vol. 50 1944.

[8] *Nehring, G.:* Über den Wärmefluß durch Außenwände und Dächer in klimatisierte Räume infolge der periodischen Tagesgänge der bestimmenden meteorologischen Elemente. Gesundheits-Ingenieur 83 (1962), H. 7, 8, 9, S. 185–189, 230–242, 253–269

[9] *Koch, H. A.* und *Pechinger, U.:* Möglichkeiten zur Berücksichtigung von Sonnen- und Wärmestrahlungseinflüssen auf Gebäudeoberflächen. Gesundheits-Ingenieur 98 (1977), H. 10, S. 265–280

[10] *Sommerfeld, A.:* Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. VI, Partielle Differentialgleichungen der Physik. Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1962.

[11] *Heindl, W., Kreč, K., Panzhauser, E.* und *Sigmund, A.:* Wärmebrücken. Springer-Verlag Wien–New York 1987.

[12] CEN TC89/WG1, Document N178 (1992).

[13] Programmpaket WAEBRU, ©Copyright 1991 Univ. Prof. Dr. *Erich Panzhauser*, TU-Wien.

[14] *Wurst, H.:* Die Transmissions-Heizlast teilweise beheizter Gebäude. Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift H. 10 (1987), Springer-Verlag Wien–New York.

[15] *Masuch, J.:* Analytische Untersuchungen zum regeldynamischen Temperaturverhalten von Räumen. VDI-Forschungsbericht 557 (1973).